$\boxed{1}$ $\mathcal{S}:\quad \begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +3y & +az & = & 9 \\ ax & +2y & +3z & = & 8 \end{array}$

a) Koliko rešenja ima sistem jednačina ako je $a=0$? Rešiti ga u tom slučaju matričnom metodom. **b)** Koliko rešenja ima sistem ako je $a=1$? Odrediti skup $R_{\mathcal{S}}$ svih rešenja (uređenih trojki realnih brojeva) sistema linearnih jednačina $\mathcal{S}$ u ovom slučaju $a=1$. **c)** Ispitati kakav je sistem za $a=-5$ i napisati $R_{\mathcal{S}}$.

Rešenje:

a) Za $a=0$ imamo da je da je determinata sistema jednačina $\mathcal{S}$ jednaka $D_{\mathcal{S}}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$

$=1\cdot\Big(3\cdot 3-2\cdot 0\Big)-1\cdot\Big(2\cdot 3-0\cdot 0\Big)-2\cdot\Big(2\cdot 2-0\cdot 3\Big)=-5$, što znači da je sistem određen, pa sledi

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & =1 \\ 2x & +3y & & =9 \\ & +2y & +3z & =8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\cdot\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{-5}\cdot\begin{bmatrix} 9 & -7 & 6 \\ -6 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\cdot\begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ -6 \end{bmatrix}==\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$, što znači $x=\frac{6}{5}$, $y=\frac{11}{5}$ i $z=\frac{6}{5}$.

b) Za $a=1$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +3y & +z & = & 9 \\ x & +2y & +3z & = & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 1 \\ & y & +5z & = & 7 \\ & y & +5z & = & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x=7z-6 \\ y=-5z+7 \\ 0=0 \end{array}$$

$R_{\mathcal{S}}=\{(7z-6,-5z+7,z)|z\in\mathbb{R}\}$ pa je sistem neodređen.

c) Za $a=-5$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & =1 \\ 2x & +3y & -5z & =9 \\ -5x & +2y & +3z & =8 \end{array} \quad \begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 1 \\ & y & -z & = & 7 \\ & 7y & -7z & = & 13 \end{array} \quad \begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 1 \\ & y & -z & = & 7 \\ & & 0 & = & -36 \end{array}$$

pa je $R_{\mathcal{S}}=\emptyset$ tj. sistem nema rešenja.

$\boxed{2}$ $\mathcal{S}:\quad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & +pz & = & -2 \\ 3x & -py & +2z & = & 0 \end{array}$

Neka je $\mathcal{S}$ sistem linearnih jednačina sa nepoznatama x,y,z i neka je p realni parametar toga sistema jednačina S.

a) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je određen?**b)** Rešiti sitem $\mathcal{S}$ za $p=0$ matričnom metodom.**c)** Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je kontradiktoran (protivurečan)?**d)** Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je neodređen? Napisati skup rešenja.

Rešenje:

a) $D_s=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & p \\ 1 & -p & 2 \end{vmatrix}=-4+p^2-(4-3p)+(-2p+6)=p^2+p-2\Leftrightarrow p=1\vee p=-2$, pa je sistem određen za $p\neq 1\wedge p\neq -2$.

b) Neka je $p=0\Rightarrow D=-2$. Tada je

$$\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-2y+0=-2 \\ 3x-0+2z=0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{D_{\mathcal{S}}}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$ tj. $(x,y,z)=(2,3,-3)\Leftrightarrow x=2,y=3,z=-3$.

c)Za $p=-2$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & -2z & = & -2 \\ 3x & +2y & +2z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -4z & = & -6 \\ & -y & -z & = & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -4z & = & -6 \\ & & 0 & = & -\frac{9}{2} \end{array}$$

pa je sistem kontradiktoran.

d) Za $p=1$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & -2y & +z & = & -2 \\ 3x & -y & +2z & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -z & = & -6 \\ & -4y & -z & = & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ & -4y & -z & = & -6 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$R_{\mathcal{S}}=\{(3y-4,y,6-4y)|y\in\mathbb{R}\}$ pa je sistem neodređen.

$\boxed{3}$

$$\mathcal{S}: \begin{array}{rrrcr} x & +y & +pz & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & -6 \\ 3x & +py & +5z & = & 6 \end{array}$$

a) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je određen?
b) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je neodređen? Napisati skup rešenja.
c) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je kontradiktoran (protivurečan)?
d) Rešiti sitem $\mathcal{S}$ za $p = 1$ matričnom metodom.

a) $D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & p & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Big(2 \cdot 5 - 3 \cdot p\Big) - 1 \cdot \Big(1 \cdot 5 - 3 \cdot 3\Big) + p \cdot \Big(1 \cdot p - 2 \cdot 3\Big) = p^2 - 9p + 14 = 0 \Leftrightarrow p = p_1 = 2 \vee p = p_2 = 7.$

Odavde sledi da je determinanta $D_{\mathcal{S}}$ različita od nule za $\boxed{p \neq 2 \ \wedge \ p \neq 7}$ tj. tada je sistem $\mathcal{S}$ određen.

b) Za $p = 2$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & -6 \\ 3x & +2y & +5z & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & -6 \\ & -y & -z & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = -z + 6 \\ y = -z - 6 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$R_{\mathcal{S}} = \{(-z+6, -z-6, z) | z \in \mathbb{R}\}$, tj. sistem $\boxed{\mathcal{S} \text{ je neodređen za } p = 2}$.

c) Za $p = 7$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & -6 \\ 3x & +7y & +5z & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & 0 \\ & y & -4z & = & -6 \\ & 4y & -16z & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +y & +7z & = & 0 \\ & y & -4z & = & -6 \\ & & 0 & = & 30 \end{array}$$

Sistem $\boxed{\mathcal{S} \text{ je kontradiktoran za } p = 7}$.

d) Rešavamo matričnom metodom za $p = 1$.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 0 \\ x & +2y & +3z & = & -6 \\ 3x & +y & +5z & = & 6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Znači $\boxed{x = 5, y = -4, z = -1.}$

$\boxed{4}$

$$\mathcal{S}: \begin{array}{rrrcr} x & +py & -z & = & 0 \\ x & -2y & -z & = & 4 \\ 3x & +4y & -pz & = & 4 \end{array}$$

a) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je određen?
b) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je neodređen? Napisati skup rešenja.
c) Za koje vrednosti parametra p sistem $\mathcal{S}$ je kontradiktoran (protivurečan)?
d) Rešiti sitem $\mathcal{S}$ za $p = 2$ matričnom metodom.

a) $D_s = \begin{vmatrix} 1 & p & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -p \end{vmatrix} = 1 \cdot \Big((-2) \cdot (-p) - (-1) \cdot 4\Big) - p \cdot \Big(1 \cdot (-p) - (-1) \cdot 3\Big) - 1 \cdot \Big(1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3\Big) = p^2 - p - 6$

$D_{\mathcal{S}} = 0 \Leftrightarrow p = p_1 = 3 \vee p = p_2 = -2$. Odavde sledi da $\boxed{\text{sistem } \mathcal{S} \text{ za } p \neq 3 \ \wedge \ p \neq -2 \quad \text{je određen.}}$

b) Za $p = 3$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & +3y & -z & = & 0 \\ x & -2y & -z & = & 4 \\ 3x & +4y & -3z & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & +3y & -z & = & 0 \\ & -5y & & = & 4 \\ & -5y & & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = z + \frac{12}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \\ 0 = 0 \end{array}$$

$R_{\mathcal{S}} = \{(z + \frac{12}{5}, -\frac{4}{5}, z) | z \in \mathbb{R}\}$, tj. sistem $\boxed{\mathcal{S} \text{ je neodređen za } p = 3}$.

c) Za $p = -2$ sistem $\mathcal{S}$ ekvivalentan je sa

$$\begin{array}{rrrcr} x & -2y & -z & = & 0 \\ x & -2y & -z & = & 4 \\ 3x & +4y & +2z & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrcr} x & -2y & -z & = & 0 \\ & & 0 & = & 4 \\ & 10y & +5z & = & 4 \end{array}$$

Sistem $\boxed{\mathcal{S} \text{ je kontradiktoran za } p = -2.}$

d) Rešavamo matričnom metodom za $p = 2$.

$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -z & = & 0 \\ x & -2y & -z & = & 4 \\ 3x & +4y & -2z & = & 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Znači $\boxed{x = 4, y = -1, z = 2.}$